

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- فرض کنید دو متغیر مستقل  $X, Y$  با توابع چگالی  $f_X(x)$  و  $f_Y(y)$  باشند توزیع  $Z = XY$  کدام است؟

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{|t|} \quad .2$$

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{|t|} \quad .1$$

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zt) \cdot f_Y(t) t dt \quad .4$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y\left(\frac{z}{t}\right) dt \quad .3$$

۲- نمونه گیری از توزیع نمایی را با  $F(x) = (1 - e^{-\theta x})$ ,  $x > 0$  در نظر بگیرید توزیع حدی  $\frac{Y_n - a_n}{b_n}$  را بیابید؟

$$\exp(-e^{-y}) \quad .4$$

$$\exp(e^{-y}) \quad .3$$

$$\exp(-e^{-y}) \quad .2$$

$$\exp(e^{-y}) \quad .1$$

۳- اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $t$  با  $k$  درجه آزادی باشد، آنگاه  $X^2$  دارای کدام توزیع است؟

۱. توزیع  $F$  استودنت

۲. توزیع کی دو

۳. توزیع  $F$ 

۴. توزیع گاما

۴- در توزیع  $F$  اگر  $X$  دارای  $F$  با  $m$  و  $n$  درجه آزادی باشد آنگاه متغیر  $W = \frac{mx/n}{1+mx/n}$  دارای کدام توزیع است؟

۱. توزیع  $F$  استودنت

۲. توزیع گاما

۳. توزیع کی دو

۴. توزیع بتا

۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $\theta \in [a, b]$   $N(\theta, 1)$  برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامتر

کدام است  $\theta$ ؟

$$\hat{\theta} = \begin{cases} a & ; & \bar{x} < a \\ \bar{x} & ; & a \leq \bar{x} \leq b \\ b & ; & \bar{x} > b \end{cases} \quad .2$$

$$\hat{\theta} = \bar{X} \quad .1$$

$$\hat{\theta} = \bar{X} + a \quad .4$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} b & ; & \bar{x} < a \\ \bar{x} & ; & a \leq \bar{x} \leq b \\ a & ; & \bar{x} \geq b \end{cases} \quad .3$$

۶- فرض کنید  $0 < \theta < 1$ ،  $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$ ،  $X_1, \dots, X_n \sim f(x|\theta)$  باشند آماره بسنده کدام است؟

۱.  $\sum \ln x_i$     ۲.  $X_{(n)}$     ۳.  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$     ۴.  $X_{(n)}$

۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیعی با چگالی زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad x > 0, \theta > 0$$

«بهترین» برآورد گر ناریب  $\frac{1}{\theta}$  واریانس آن با کران پایین کرامر - راثو برابر باشد کدام است؟

۱.  $\frac{1}{n} \sum X_i^2$     ۲.  $\frac{1}{n} \sum X_i^2 + 2$     ۳.  $\frac{1}{n} \sum X_i + 2$     ۴. وجود ندارد

۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $B(2, \theta)$  باشد. کران پایین کرامر - راثو برای واریانس برآورد گرهای ناریب  $\theta$  برابر است با:

۱.  $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$     ۲.  $\frac{2\theta^2(1-\theta)}{n}$     ۳.  $\frac{(1-\theta)^2}{n}$     ۴.  $\frac{2\theta(1-\theta)}{n}$

۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $B(1, \theta)$  که  $\theta \in (0, 1)$  باشد UMVUE پارامتر  $\theta$  کدام است؟

۱.  $\prod_{i=1}^n X_i / n$     ۲.  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$     ۳.  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$     ۴.  $\sum X_i$

۱۰- فرض کنید  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد باشد تابع توزیع  $Y = Z^2$  کدام است

۱.  $\int_0^y \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{2z}} e^{-\frac{1}{2}z} dz$     ۲.  $\int_0^y \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z} dz$

۴. نامشخص

۳.  $\int_0^y \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z} dz$

۱۱- اگر  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  یک برآوردگر نااریب برای  $\sigma^2$  باشد آنگاه آماره  $S$  یک برآوردگر ...

۱. نااریب برای  $\sigma$  است. ۲. نااریب برای  $\sigma$  نیست. ۳. اریب برای  $\sigma^2$  است. ۴. نااریب برای  $\sigma^2$  است.

۱۲- اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه ای تصادفی باشد تابع توزیع  $Y = \min[X_1, \dots, X_n]$  کدام است

۱.  $\prod_{i=1}^n [F_X(y)]^n$  ۲.  $1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_X(y)]$  ۳.  $\prod_{i=1}^n [1 - F_X(y)]^n$  ۴.  $\prod_{i=1}^n [1 - F_X(y)]$

۱۳- اگر  $X, Y$  مستقل باشند آنگاه:

۱.  $E[XY] = Var[X]Var[Y]$

۲.  $E[XY] = \mu_X \mu_Y$

۳.  $Var(xy) = \mu_y^2 Var[X] - \mu_x^2 Var[Y] + Var[X]Var[Y]$

۴.  $Var(xy) = \mu_x^2 Var[X] - \mu_y^2 Var[Y] + Var[X]Var[Y]$

۱۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع پواسن هستند و پارامتر مربوط به توزیع  $X_i$  برابر  $\lambda_i$  می

باشد توزیع  $\sum X_i$  کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱.  $PO\left(\frac{n}{\lambda}\right)$  ۲.  $PO\left(\frac{n}{\lambda}\right)$  ۳.  $PO(\sum \lambda_i)$  ۴.  $PO(\lambda_i)$

۱۵- فرض کنید  $X$  یک مشاهده از توزیع  $0 \leq \theta \leq 1$   $f(x, \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|}$   $x = -1, 0, 1$  باشد آنگاه:

۱.  $X$  یک اماره بسنده کامل است. ۲.  $|X|$  یک اماره بسنده کامل نیست.

۳.  $X$  یک اماره بسنده کامل نیست. ۴.  $|X|$  یک اماره بسنده کامل است.

۱۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیر تصادفی مستقل وهم توزیع با  $N(\mu, \sigma^2)$  باشند گشتاورهای مرتبه اول و دوم حول میانگین به ترتیب کدامند؟

۱.  $\sigma$  و  $\mu$       ۲.  $\sigma^2$  و  $\mu$       ۳.  $\sigma$  و  $\sigma^2$       ۴.  $\mu$  و  $\sigma^2$

۱۷- اگر  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد آنگاه کدامیک از موارد زیر نادرست است؟

۱.  $\bar{Z}$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\frac{\sigma^2}{n}$

۲.  $\sum (Z_i - \bar{Z})^2$  دارای توزیع کی دو با  $n-1$  درجه آزادی

۳.  $\bar{Z}$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\frac{1}{n}$

۴.  $\bar{Z}$  و  $(Z_i - \bar{Z})^2$  مستقل اند

۱۸- اگر  $X$  دارای توزیع  $t$  با  $k$  درجه آزادی باشد آنگاه متغیر  $\frac{1}{1 + \frac{X^2}{k}}$  دارای کدام توزیع است؟

۱. توزیع  $F$       ۲. توزیع  $t$ ی استودنت      ۳. توزیع گاما      ۴. توزیع بتا

۱۹- اگر  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد و  $U$  دارای توزیع کی دوبا  $k$  درجه آزادی باشد واگر  $Z$  و  $U$  مستقل باشند، آنگاه  $\frac{Z}{\sqrt{U/k}}$  کدام توزیع است؟

۱. توزیع کی دوبا  $k$  درجه آزادی      ۲. توزیع  $t$ ی استودنت با  $k-1$  درجه آزادی  
 ۳. توزیع کی دوبا  $k-1$  درجه آزادی      ۴. توزیع  $t$ ی استودنت با  $k$  درجه آزادی

۲۰- فرض کنید نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  دارای تابع چگالی  $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$  باشند در اینصورت برآوردگر درستنمایی ماکزیمم  $\theta$  کدام است؟

۱.  $\text{Ln} \sum \frac{x_i}{n}$       ۲.  $X_{(1)}$       ۳.  $X_{(n)}$       ۴.  $\frac{-n}{\text{Ln} \prod_{i=1}^n x_i}$

۲۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n \sim f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)}, -\infty < \mu < x < \infty$  باشند آماره بسنده کدام است؟

۱.  $\sum \ln x_i$       ۲.  $X_{(n)}$       ۳.  $X_{(1)}$       ۴.  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$

۲۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  بطوریکه  $f(x|\theta) = \theta x^{-2}, 0 < \theta < x < \infty$ ،  $MLE(\theta)$  (برآورد ماکزیمم درست‌نمایی) کدام است؟

۱.  $\bar{x}$       ۲.  $X_{(1)}$       ۳.  $\sum x_i$       ۴.  $X_{(n)}$

۲۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از چگالی  $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} I_{(\cdot, \theta)}(x)$  باشد برآوردگر گشتاوری برای پارامتر  $\theta$  کدام است؟

۱.  $\bar{x}$       ۲.  $X_{(n)}$       ۳.  $X_{(1)}$       ۴.  $2\bar{x}$

۲۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  مستقل و هم توزیع باشند و داشته باشیم

$$E_{\theta}(X_i) = \theta + b, b \neq 0, \text{var}_{\theta}(X_i) = \sigma^2 < \theta$$

۱.  $\bar{x}$  برای  $\theta$  سازگار است.      ۲.  $x$  برای  $\theta$  سازگار است.

۳.  $\bar{x}$  برای  $\theta$  سازگار نیست.      ۴.  $x$  برای  $\theta$  سازگار نیست.

۲۵- فرض کنید ظرفی شامل  $\theta$  مهره است که از ۱ تا  $\theta$  شماره گذاری شده است برآورد گشتاوری پارامتر  $\theta$  براساس نمونه تصادفی کدام است؟

۱.  $3\bar{x}$       ۲.  $\bar{x}$       ۳.  $2\bar{x} - 1$       ۴.  $\frac{2\bar{x} - 1}{\bar{x}}$

### سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد و  $U$  دارای توزیع کی دو با درجه آزادی  $k$  باشد. به شرط آنکه  $Z$  و  $U$  ۱.۴۰ نمره

مستقل باشند. توزیع  $X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{k}}}$  را به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۲- قانون ضعیف اعداد بزرگ را بیان و اثبات کنید.

۱.۴۰ نمره

۳- فرض کنید یک نمونه تصادفی از توزیع کشی با تابع چگالی احتمال به صورت زیر:

$$f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}$$
 در اختیار است. مطلوب است:

الف) آماره بسنده مینیمال برای پارامتر این توزیع

ب) توزیع میانگین نمونه

ج) تابع مولد گشتاور توزیع

۱.۴۰ نمره

۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه ای تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازه  $(-\theta, \theta)$  باشد برآوردگر درست‌نمایی

ماکزیمم پارامتر رابیباید.

۱.۴۰ نمره

۵- فرض کنید نمونه ای تصادفی از توزیع  $f(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(\cdot, \theta)}(x)$  باشد برآوردگر UMVUE برای  $\theta$  رابیباید.